

Title	リンクルの低減を目的とした矩形膜の周辺境界設計
Author(s)	秋田, 剛; 小木曾, 望
Editor(s)	
Citation	膜構造研究論文集. 2008, 8, p.1-9
Issue Date	2008-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15671">http://hdl.handle.net/10466/15671</a>
Rights	

# リンクルの低減を目的とした矩形膜の周辺境界設計

秋田 剛<sup>\*1</sup>  
小木曾 望<sup>\*2</sup>

## 梗 概

本論文では、リンクル強度関数を利用した膜面のリンクル低減設計法を矩形膜の周辺境界設計に適用し、その有効性を示す。まず射影行列を利用した張力場理論の定式化を示し、リンクルの強度に対応したリンクル強度関数を定義する。次にリンクル強度関数により膜面のリンクル量を定義し、その感度評価式を示す。膜面のリンクル量を目的関数としたリンクル低減設計法を考え、矩形膜の周辺境界設計に適用する。周辺境界設計では矩形膜の境界をテープで補強し、その補強する領域を膜上のリンクルが低減するように設計する問題を考え、数値解析によってリンクル低減設計の有効性を示す。

## 1. はじめに

近年、軽量で高収縮性という特徴を持つ膜材が、大型宇宙構造物の構成要素として大きな注目を集めている。一般に膜材は、圧縮力に対してほとんど抵抗することが出来ないため、圧縮力の作用により容易に局所座屈を起こしリンクルを生じる。リンクルの存在は、膜面を利用した宇宙構造物の力学的な特性に大きな影響を与え、また形状的にも本来の機能を損なう可能性がある。例えばリンクルの発生によって宇宙用膜面リフレクターの鏡面誤差が増大することや、ソーラーセイル上の熱環境が悪化してしまうことなどが知られている<sup>(1,2)</sup>。膜面宇宙構造物の設計ではリンクルの生じる領域を極力少なくするように設計することが重要である。

地上の膜面建築物では、等張力曲面を目的関数とした形状設計によって、リンクルを生じない膜面を実現させることが多い<sup>(3,4)</sup>。理論的には等張力曲面によって膜面のリンクルを完全に除去することができるが、設計の結果得られる膜面の形状は限定されたものとなる。宇宙空間で用いられる膜面構造物は、ミッションの目的から実現できる形状に制限があり、形状を限定される設計は一般に望ましくない。また、その機能を考えた場合、ミッションに影響を与える領域のリンクルを低減するように設計を行えば十分であることが多く<sup>(5)</sup>、ある程度のリンクルを許容した上での構造設計が現実的である。

部分的にリンクルを許容した膜面宇宙構造物の設計は、張力場理論を用いて行われることが多い<sup>(6)</sup>。張力場理論では、膜面の大域的な力学特性と同時にリンクルの発生領域を求めることが可能であり、種々の設計パラメータを変化させ、リ

ンクル領域をミッションに必要な領域から分離させるように設計を行うことができる<sup>(7)</sup>。ただし、この方法ではリンクルの領域情報のみが求められるので、リンクルの強弱や設計変数に対する感度を定量的に扱うことができない。近年、秋田ら<sup>(8)</sup>は膜面のひずみエネルギーを利用して定量的にリンクルの強度を表すリンクル強度関数を提案した。またリンクル強度関数の任意の設計変数に関する感度を射影行列により表し、感度解析によるリンクル低減設計法を提案した。

一般に膜面宇宙構造物では特に矩形膜を中心として、膜面の周辺境界設計<sup>(9-11)</sup>がなされることが多い。著者らは、リンクル強度関数を利用したリンクル低減設計法を、平面膜の境界形状最適化に適用し有効性を示した<sup>(12)</sup>。本論文では、より実効性の高い設計として、矩形膜の境界をテープで補強し、その補強する領域を膜上のリンクルが低減するような設計を考える。リンクル強度関数を目的関数とした最適設計の結果、膜面上のリンクルを低減させる設計が得られることを数値計算により示す。

本論文の構成は以下の通りである。まず張力場理論におけるリンクルモデルの基礎式とリンクル強度関数の導出を文献13, 14 に従い示す。次にリンクル強度関数の感度評価式<sup>(8)</sup>とリンクル低減設計法を示し、最後に矩形膜の周辺境界設計の数値解析結果を示す。

## 2. 射影行列によるリンクルモデルとリンクル強度関数

張力場理論に関してこれまでに多くの研究がなされている(文献15に多くの参考文献が示されている)。特に1970年代以降、張力場理論を数値解析に適用するための力学モデルが数多く

\*1 大阪府立大学工学研究科 助教

\*2 大阪府立大学工学研究科 准教授

提案されてきた。剛性変化法では、リンクルを生じた膜面の弾性行列を張力に直交する方向の剛性を低下させるように修正し、繰り返し計算により張力場理論に適合する数値解を求めている<sup>(16~18)</sup>。また、リンクル状態にある膜面の変形勾配テンソルを張力場理論に適合するように修正し、リンクルをモデル化する方法も考案されている<sup>(19~22)</sup>。この方法は、近年、中篠ら<sup>(23)</sup>によって、ある種の剛性変化法に帰結されることが示されている。また、秋田らにより中篠らの方法の線形代数的な解釈がなされ、射影行列を用いたリンクルモデルが提示されている<sup>(13,14)</sup>。本章では文献13,14に従い射影行列を用いたリンクルモデルを示し、リンクルの強度を定量的に表すリンクル強度関数を導出する。

## 2.1. 張力場理論の概要

はじめに、張力場理論の基本的な仮定について簡単に述べる。張力場理論では、膜面の曲げ剛性を零と仮定し、膜面に圧縮応力が作用した際、リンクルの形成によって圧縮応力は完全に解放されるものとする(図1(a))。このとき膜面の応力場は、一方向の主応力が正、もう一方向の主応力が零となる張力場でモデル化される。また、リンクルの形成に伴う面外変形は、等方弾性膜を考えた場合、張力に直交する方向の面内収縮変形としてモデル化される<sup>(21)</sup>(図1(b))。このとき、面内収縮変形は主応力が零の方向への変形となるため、エネルギーを発生しない特殊な変形モードとなる。これらの仮定から、張力場理論では膜面のリンクル現象を座屈解析を行うことなく平面問題として扱うことができる。ただし通常の膜理論では、リンクルの形成に伴う面内収縮変形を扱うことができず、特別な配慮が必要となる。

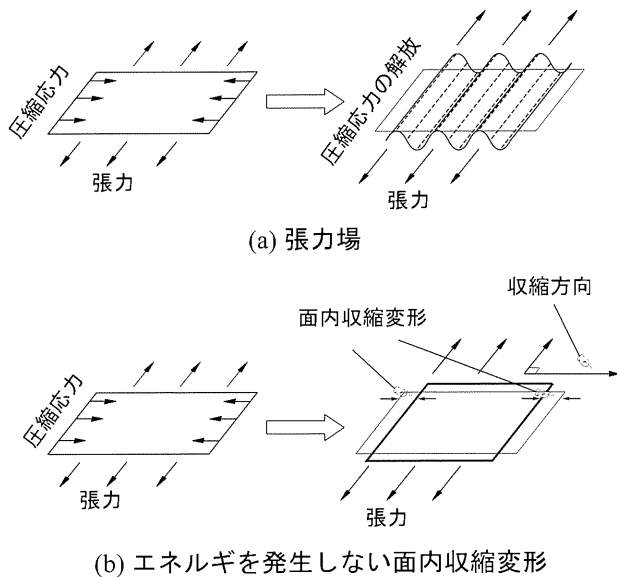


図1 張力場理論の基本的な仮定

## 2.2. 等方弾性膜の基礎式

本論文では等方弾性膜を解析の対象とする。平面応力状態にある等方弾性膜の  $x-y$  座標系における応力、ひずみ成分は次のように三次元ベクトルで表すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

また、応力・ひずみ関係式は弾性行列  $\mathbf{C}$ 、ヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  を用いて

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

となる。いま、主軸座標系から角度  $\theta$  回転した  $x-y$  座標系を考えると、応力、ひずみ成分の主軸座標系から  $x-y$  座標系への成分変換式を、以下のようにベクトル形式で表すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{s}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{s}_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}^T$$

ここに  $\sigma_i, \varepsilon_i (i=1,2)$  はそれぞれ主応力、主ひずみであり

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \quad (5)$$

とする。最後に以下の式で定義されるベクトル  $\mathbf{n}_3$  を導入する。

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad (6)$$

式(3)の第1式と式(6)の内積をとり式(2)を考慮すると

$$f(\theta) = \mathbf{n}_3^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_3^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (7)$$

のように主軸角度  $\theta$  とひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  の関係式が得られる。

## 2.3. 射影行列を用いたリンクルモデル

ここでは文献13,14に従って射影行列を用いたリンクルモデルを示す。まず張力場理論におけるリンクルの形成プロセスについて考察しよう。いま、張力場状態にある膜面の主応力値を  $\sigma_1$  とする。図2(a)に示すように、変形プロセスとして、張力  $\sigma_1$  による膜面の純粋な弾性変形を考える。このとき、膜面は張力によって引張方向に、またポアソン効果によって収縮方向に変形する。このプロセスの変形の結果生じるひずみは、純粋な弾性ひずみとなる。次に、この状態から、図2(b)に示すように、膜面がリンクルの発生に伴い張力に直交する方向に収縮変形するプロセスを考える。張力場理論の仮定から、このプロセスの変形は、エネルギーを発生しない特別な変形モードとなる。この変形モードの結果生じるひずみを、リンクルモード変形と呼ぶことにする。張力場理論ではこれらのプロセスの重ね合わせとしてリンク

ルが形成されると考えられ、リンクルを生じた膜面の全体ひずみは、弾性ひずみとリンクルモード変形の重ね合わせで表現される。

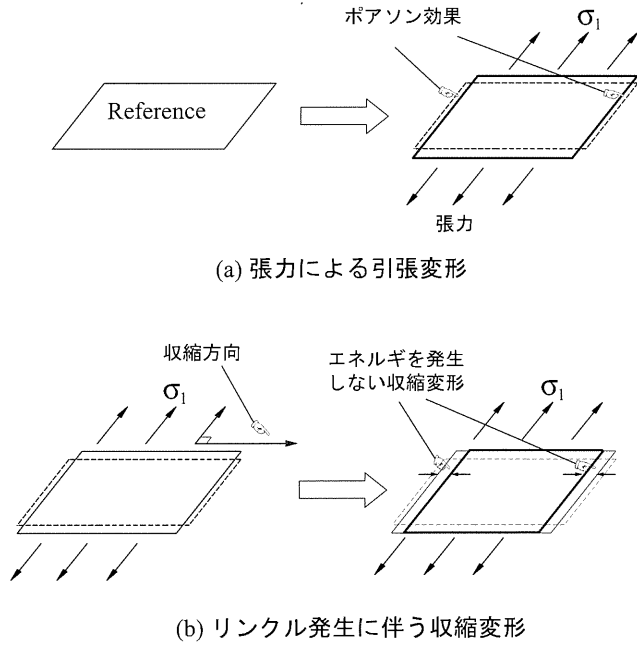


図2 リンクルの形成プロセス

次に弾性ひずみとリンクルモード変形をベクトル形式で表し、射影行列によるひずみの分解表現を求める。式(3)を使って一軸の張力状態にある膜面の応力ベクトル  $\sigma_t$  を

$$\sigma_t = \sigma_1 \mathbf{n}_1 + 0 \mathbf{n}_2 = \sigma_1 \mathbf{n}_1 \quad (8)$$

と表すことができる。いま、 $\epsilon_w$  をリンクルモード変形ベクトルとすると、 $\epsilon_w$  がエネルギーを発生しない条件は

$$\epsilon_w^T \sigma_t = 0 \quad (9)$$

となる。よって

$$\mathbf{s}_2^T \mathbf{n}_1 = 0 \quad (10)$$

が成り立つことに注意すると、 $\epsilon_{2w}$  を非零のスカラー値として張力場理論の仮定からリンクルモード変形ベクトルを以下のように表すことができる。

$$\epsilon_w = \epsilon_{2w} \mathbf{s}_2 \quad (11)$$

式(8)と式(11)の内積を取ると

$$\epsilon_w^T \sigma_t = \epsilon_{2w} \sigma_1 \mathbf{s}_2^T \mathbf{n}_1 = 0 \quad (12)$$

となり式(9)を満たすことがわかる。いまリンクル発生後の膜面の全体ひずみベクトルを  $\epsilon$  と置くと、弾性ひずみベクトル  $\epsilon_e$  は  $\epsilon$  と  $\epsilon_w$  の差分として次式のように表される。

$$\epsilon_e = \epsilon - \epsilon_w = \epsilon - \epsilon_{2w} \mathbf{s}_2 \quad (13)$$

弾性ひずみは、純粋な弾性変形の結果生じたものと考えられるので、 $\sigma_t$  と  $\epsilon_e$  の間には次式のような通常の応力ひずみ関係が

成り立つ。

$$\sigma_t = \mathbf{C} \epsilon_e = \mathbf{C} (\epsilon - \epsilon_{2w} \mathbf{s}_2) \quad (14)$$

式(11)、(14)を式(12)に代入して整理すると

$$\epsilon_{2w} = \frac{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \epsilon}{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2} \quad (15)$$

が求められる。式(15)を式(11)、(13)に代入すると、リンクルモード変形と弾性ひずみのベクトル表現が以下のように求められる。

$$\epsilon_w = \frac{\mathbf{s}_2 \mathbf{C} \epsilon}{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2} \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}}{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2} \epsilon = \mathbf{Q} \epsilon \quad (16)$$

$$\epsilon_e = \epsilon - \epsilon_w = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \epsilon = \mathbf{P} \epsilon \quad (17)$$

ここに  $\mathbf{I}$  は  $3 \times 3$  の単位行列であり、

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^T \mathbf{C}}{\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2}, \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q} \quad (18)$$

である。行列  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  は次式を満たす射影行列となる<sup>(13,14)</sup>。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^2 &= \mathbf{Q} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}^2 &= \mathbf{Q} \mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{P} \\ \mathbf{C} \mathbf{Q} &= (\mathbf{C} \mathbf{Q})^T \\ \mathbf{C} \mathbf{P} &= (\mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{Q}) = (\mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{Q})^T = (\mathbf{C} \mathbf{P})^T \\ \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} &= \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし  $\mathbf{0}$  は  $3 \times 3$  の零行列である。

#### 2.4. リンクル強度関数

リンクルを生じた膜面の弾性変形は  $\epsilon_e$  によって表される。このとき、膜面の物質点におけるひずみエネルギー密度関数  $\phi_e$  は

$$\phi_e = \frac{1}{2} \epsilon_e^T \mathbf{C} \epsilon_e \quad (20)$$

と表される。ここで式(20)に式(17)を代入し式(19)を考慮すると

$$\phi_e = \frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \epsilon = \phi_p - \phi_w \quad (21)$$

を得る。ここに

$$\phi_p = 1/2 \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon \quad (22)$$

$$\phi_w = 1/2 \epsilon_w^T \mathbf{C} \epsilon_w \quad (23)$$

である。式(22)は、通常の膜理論のひずみエネルギー密度関数の定義式と一致する。この関数は全体ひずみベクトル  $\epsilon$  により定義されるが、 $\epsilon$  にはエネルギーを発生しない収縮変形に対応す

るひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_w$  を含んでいるので、実際のひずみエネルギーよりも大きな値となってしまう。このときの過剰分のエネルギーに対応するのが式(23)で表される  $\phi_w$  であり、行列  $\mathbf{C}$  の正定値対称性から非負の値を取る。  $\phi_w$  は  $\boldsymbol{\varepsilon}_w$  に依存したスカラー関数、つまりリンクルによる膜面の収縮量に依存したスカラー関数となり、  $\phi_w$  の値が小さいほど膜面に生じたリンクルの強度が弱い状態になると考えられる。仮に  $\phi_w = 0$  とすると、  $\boldsymbol{\varepsilon}_w = \mathbf{0}$ 、つまり膜面にリンクルが存在しない状態となり、このとき  $\phi_e$  と  $\phi_p$  は一致し、膜面のひずみエネルギー密度関数は通常の膜理論のものと一致する。本論文では  $\phi_w$  を膜面の物質点のリンクル量を定量的に表す関数と考え、リンクル強度関数と呼ぶ<sup>(6)</sup>。

### 3. リンクル強度関数の感度とリンクル低減設計

本章では文献8に従い、前章で求めたリンクル強度関数の感度評価式とリンクル低減設計への適用方法を示す。

#### 3.1. 膜面の有限要素および全体のリンクル量の定義

前章で定義したリンクル強度関数は、膜面の物質点におけるリンクル量を表すものであった。ここではまず膜面の有限要素および膜面全体のリンクル量を定義する。いま、有限要素により離散化された膜面を考える。このとき、  $k$  番目の膜要素のリンクル量を次式により定義する。

$$U_w^k = \int_{V_e} \phi_w(r_1, r_2) dV \quad (24)$$

ここで  $V_e$  は変形前の膜要素の体積を表し、  $r_i$  は膜要素の埋め込み座標を表す。また膜面全体のリンクル量を次式により定義する。

$$U_w = \sum_{k=1}^{N_e} U_w^k \quad (25)$$

ここで  $N_e$  は膜要素の総数を表す。

#### 3.2. リンクル強度関数の感度

リンクル強度関数のひずみ感度を求めよう。式(23)に式(16)を代入し式(19)を考慮すると

$$\phi_w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

を得る。さらに上式の両辺の変分をとり式(19)を考慮すると

$$\delta \phi_w = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (27)$$

ここで

$$\mathbf{s}_2^T \mathbf{C} \mathbf{s}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} = \text{const.}, \delta \mathbf{s}_2 = -2\mathbf{n}_3 \delta \theta \quad (28)$$

の関係を利用して式(18)から

$$\delta \mathbf{Q} = \frac{2(\nu^2 - 1)}{E} (\mathbf{n}_3 \mathbf{s}_2^T \mathbf{C} + \mathbf{s}_2 \mathbf{n}_3^T \mathbf{C}) \delta \theta \quad (29)$$

が求められる。式(29)を式(27)の右辺第二項に代入し、式(7)を考慮すると

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (30)$$

を得る。よって式(30)を式(27)に代入すると、  $\phi_w$  の全体ひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  に対する感度が

$$\frac{\partial \phi_w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (31)$$

として求められる。

#### 3.3. 膜要素のリンクル量の変位感度

いま、  $k$  番目の膜要素における節点変位ベクトルを  $\mathbf{u}_e^k$  とする。式(24)より膜要素のリンクル量の変位感度は

$$\frac{\partial U_w^k}{\partial \mathbf{u}_e^k} = \int_{V_e} \mathbf{B}_L^{kT} \frac{\partial \phi_w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (32)$$

と表される。ここで

$$\mathbf{B}_L^k = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}_e^k} \quad (33)$$

は、通常のひずみ・変位関係を表す行列である。式(31)を式(32)に代入すると

$$\frac{\partial U_w^k}{\partial \mathbf{u}_e^k} = \int_{V_e} \mathbf{B}_L^{kT} \mathbf{C} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (34)$$

を得る。

#### 3.4. 膜面全体のリンクル量の設計変数感度

有限要素により離散化された膜面の全体節点ベクトルを  $\mathbf{U}$  とする。このとき、式(25)、(34)より膜面全体のリンクル量  $U_w$  の  $\mathbf{U}$  に対する感度は

$$\frac{\partial U_w}{\partial \mathbf{U}} = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{L}^{kT} \int_{V_e} \mathbf{B}_L^{kT} \mathbf{C} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (35)$$

となる。ここで  $\mathbf{L}^k$  は次式で定義されるブーリアン行列である。

$$\mathbf{u}_e^k = \mathbf{L}^k \mathbf{U} \quad (36)$$

次に  $U_w$  の任意の設計変数  $b_j$  に関する感度を、半解析微分法<sup>(24)</sup>により求める。いま、  $\mathbf{q}$  を内力ベクトル、  $\mathbf{f}$  を外力ベクトルとすると、非線形有限要素法における力の釣り合い式は

$$\mathbf{q}(\mathbf{U}(b_j), b_j) = \mathbf{f} \quad (37)$$

と表される。上式に対し、設計変数  $b_j$  の変分を考えると、

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_j} \delta b_j = \mathbf{0} \quad (38)$$

となる。式(38)より  $\mathbf{U}$  の  $b_j$  に対する感度は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial b_j} = -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_j} \quad (39)$$

ここに

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (40)$$

は接線剛性行列である。式(39)において、 $\mathbf{q}$ の $b_j$ に対する感度を求める必要があるが、これを解析的に求めることは一般に困難である。半解析微分法では、 $\mathbf{q}$ の感度を次式に示すような数値差分に置き換えて評価する。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_j} \approx \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta b_j} \quad (41)$$

ただし $\Delta b_j$ は、設計変数の微小な摂動量であり、数値的に与えられる。また、 $\Delta \mathbf{q}$ は設計変数の摂動に対する内力ベクトルの微小変化量を表す。式(35)、(39)、(41)より $U_w$ の設計変数に対する感度評価式が

$$\frac{\partial U_w}{\partial b_j} \approx \left( -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta b_j} \right)^T \frac{\partial U_w}{\partial \mathbf{U}} \quad (42)$$

として求められる。

### 3.5. リンクル低減設計問題

いま設計変数の総数を $N_d$ として設計変数ベクトルを

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{N_d}]^T \quad (43)$$

で定義する。このとき膜面のリンクル低減設計問題は次式で定義される<sup>(6)</sup>。

$$\text{Minimize: } U_w(\mathbf{b}) \quad (44)$$

本論文では最急降下法によって式(44)の解を求める。式(44)の目的関数 $U_w$ の感度ベクトルは

$$\frac{dU_w}{d\mathbf{b}} = \left[ \frac{dU_w}{db_1} \ \frac{dU_w}{db_2} \ \dots \ \frac{dU_w}{db_{N_d}} \right]^T \quad (45)$$

となり、このとき $U_w$ の最急降下方向は

$$-\frac{dU_w}{d\mathbf{b}} \quad (46)$$

で求められる。式(46)を用いて、最急降下法の $l$ 番目のステップにおける設計変数の更新則は次式で与えられる。

$$\mathbf{b}_l^{(i+1)} = \mathbf{b}_l^{(i)} - s^{(i+1)} \frac{dU_w}{d\mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_l^{(i)}} \quad (47)$$

ここに上付の(i)は $l$ 番目ステップにおけるラインサーチの増分ステップ数、 $s$ はラインサーチの増分量を $a_c$ として次式で定義される増分係数である。

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} + a_c, s^{(0)} = 0 \quad (48)$$

式(47)の感度ベクトルはラインサーチの初めの増分ステップのみで計算される。ラインサーチは以下の条件が満足されるまで増分を続ける。

$$U_w(\mathbf{b}_l^{(i+1)}) \geq U_w(\mathbf{b}_l^{(i)}) \quad (49)$$

上記の条件が満足された場合(このときの増分ステップを $i = n_l$ として)、設計変数ベクトルを

$$\mathbf{b}_{l+1}^{(0)} = \mathbf{b}_l^{(n_l)} \quad (50)$$

のように更新し、最急降下法のステップを1つ進める。更新された設計変数ベクトルにより新たな感度ベクトル

$$\frac{dU_w}{d\mathbf{b}} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_{l+1}^{(0)}} \quad (51)$$

を計算し、再びラインサーチを開始する。最急降下法の収束条件は以下の式で定義される。

$$U_w(\mathbf{b}_{l+1}^{(n_l)}) \geq U_w(\mathbf{b}_l^{(n_l)}) \quad (52)$$

以上の最急降下法の手順を図3に示す。

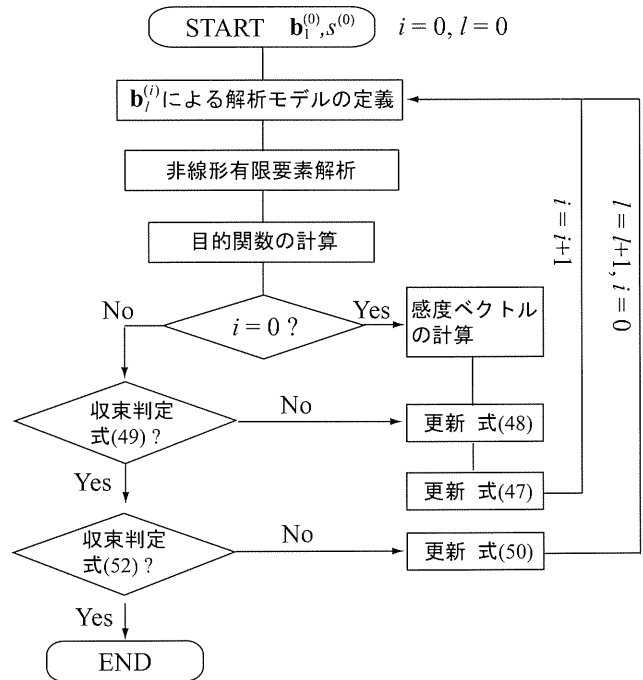


図3 最急降下法の手順

## 4. 矩形膜の周辺境界設計

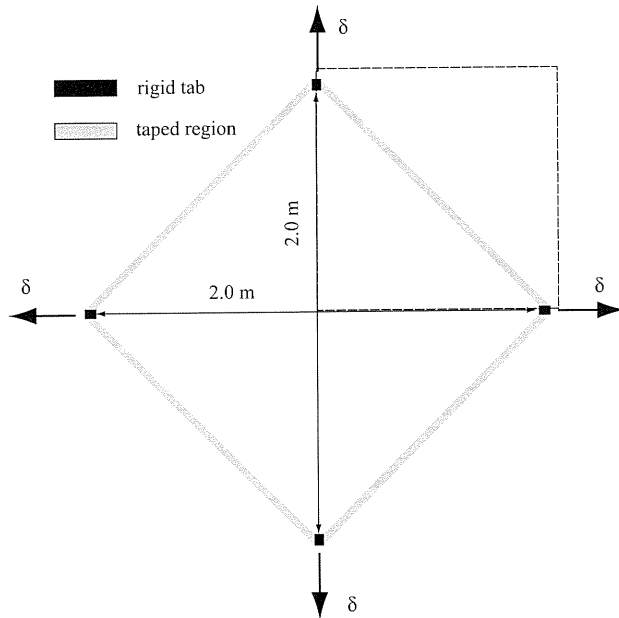
本章ではリンクル強度関数を利用したリンクル低減設計の有効性を示すために、矩形膜の境界をテープで補強する際の補強領域を設計変数とした、リンクル低減設計問題を考える。

### 4.1. 設計モデル

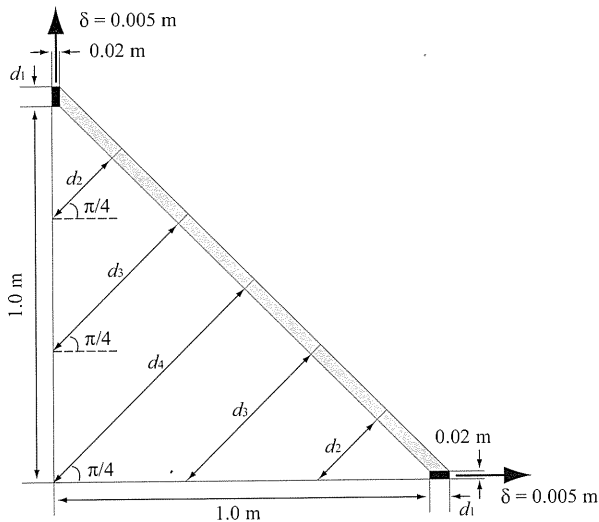
設計モデルとして図4(a)のように周辺境界に一定厚さのテー

プを貼り付けた矩形膜を想定する。矩形膜の四頂点にハブを設置し、頂点に強制変位を与え膜面に張力を与える。このとき、ハブを起点に放射状にリンクルが発生する。初期設計では、ハブの頂点間を直線で結ぶようにテープの貼り付ける。

設計モデルでは、図 1(b)のように矩形膜の 1/4 三角形モデルを考え、ハブの長さ  $d_1$  とテープ境界と左辺、底辺までの距離  $d_2, d_3, d_4$  を設計変数とする。式(44)の最小化問題を最急降下法により求める。膜材は厚さ  $7.5 \mu\text{m}$  のポリイミドフィルムを仮定し、ヤング率  $2.5\text{GPa}$ 、ポアソン比  $0.3$  とする。テープ部分も同様の物性値を持つポリイミドフィルムを仮定するが、厚さを  $100 \mu\text{m}$  とする。三角形モデルの一边を  $1.0\text{m}$ 、ハブの幅を  $20.0\text{mm}$  とし、 $\delta = 5.0\text{mm}$  の強制変位を与えたときにリンクル量を最小にするような設計変数を求める。



(a) Square membrane

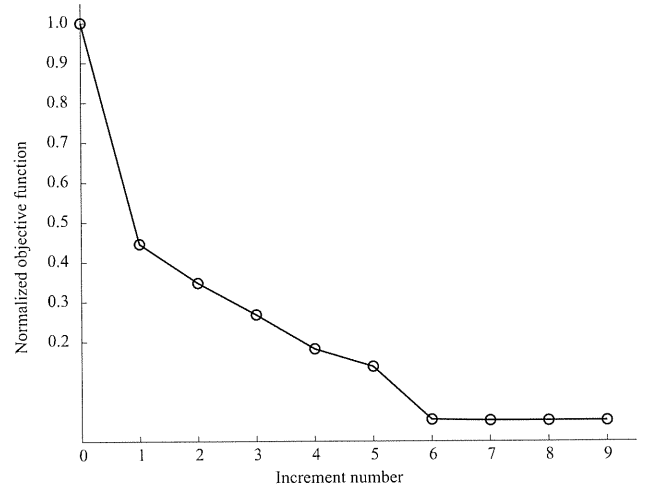


(b) Design model

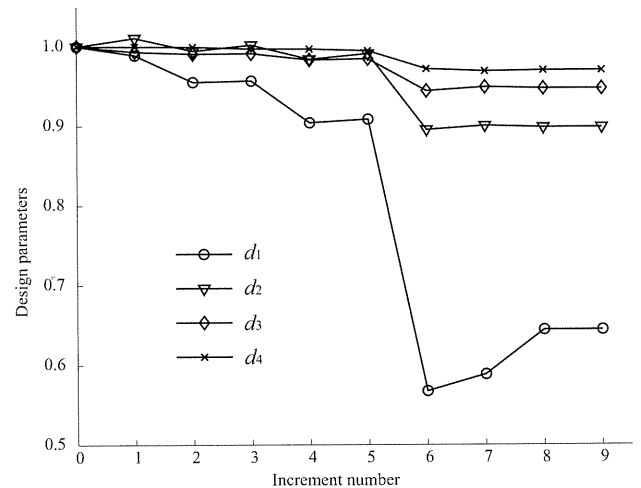
図 4 矩形膜のテープ貼り付け領域設計モデル

## 4.2. 解析結果

最急降下法の結果を図 5 に示す。図 5(a) は、最急降下法の反復回数と  $U_w$  (初期値で正規化) との関係が示されている。図から反復回数が 9 回目のときに  $U_w$  が収束しリンクル量が大幅に減少していることがわかる。同様に反復回数と設計変数 (初期値で正規化) との関係を図 5(b) に示す。また図 6 に反復回数 9 回目の最急降下法収束時のテープの貼り付け領域を示す。これらの図からハブ部分の領域が縮小し、テープの境界領域は斜辺の中点を最大点として頂点に向かって面積が減少するような領域形状になっていることがわかる。



(a) Objective function vs increment number



(b) Design parameters vs increment number

図 5 解析結果

図 7 に初期設計と最終設計における膜面のリンクル強度関数の分布図を示す。図から初期設計時には矩形膜周辺部のリンクル強度関数の値が大きいですが、リンクル低減設計により、最終設計でこれらの領域のリンクル強度関数の値が低減されることがわかる。さらに図 8 に、シェル要素を使ったリンクル解析結果を示す。解析は MITC 要素を用いた疑似分岐座屈解析<sup>(25)</sup>により行い、リンクルの形状を求めている。図からシェル要素を用いた解析においても初期設計に比べて最適設計では、リンクルの発生が抑制されていることがわかる。このことから、リンクル強度関数を

減少させることで、実際のリンクルを減少させることが可能であることがわかる。

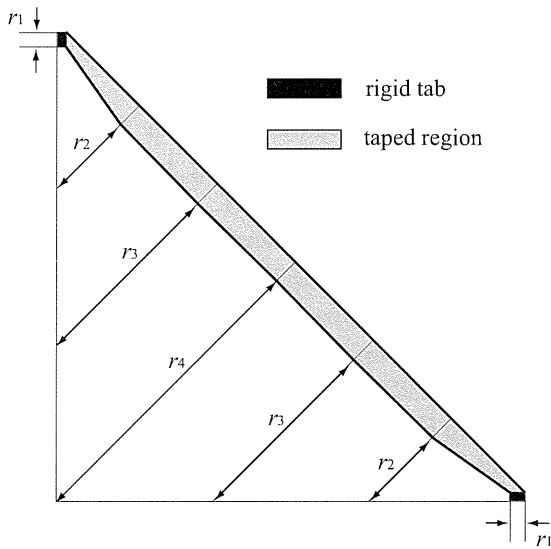


図6 設計後のテープ貼り付け領域

### 5. まとめ

本研究では、射影行列を使ったリンクルモデルに基づき、リンクル強度関数の定義を示した。また、リンクル強度関数の感度評価式を利用したリンクル低減設計法を示した。矩形膜の周辺境界設計問題として、矩形膜の境界をテープで補強することを考え、その補強領域を膜上のリンクルが低減するように設計する問題を考えた。リンクル強度関数に基づくリンクル低減設計法によって、膜面上のリンクル強度関数を低減させる設計が得られることを数値計算により示した。またシェル要素を使ったリンクル解析においても、リンクル低減設計法によって求められたモデルでリンクルの発生が抑制されることを示した。今後は、貼り付け面積一定などの制約条件を入れた最適設計や、実証実験によるリンクル低減設計の有効性を検証していきたい。

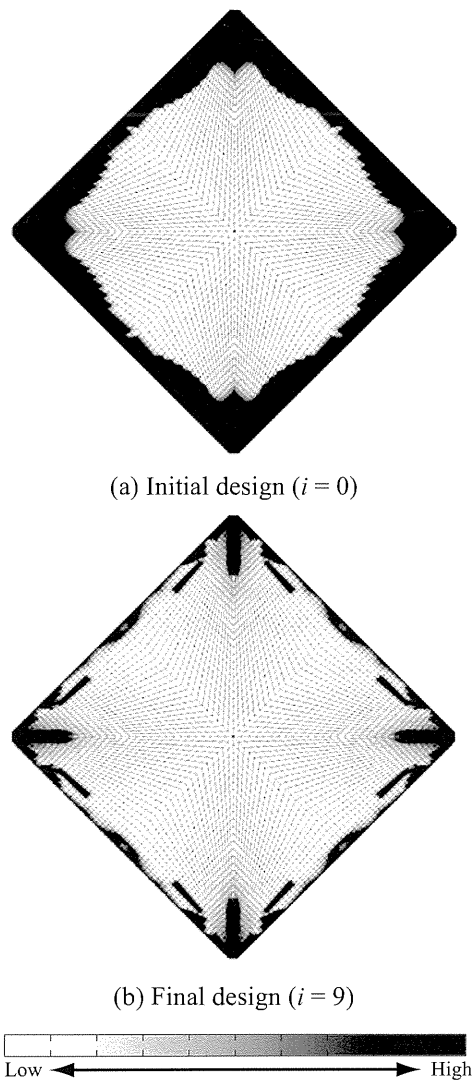


図7 リンクル強度関数の分布図

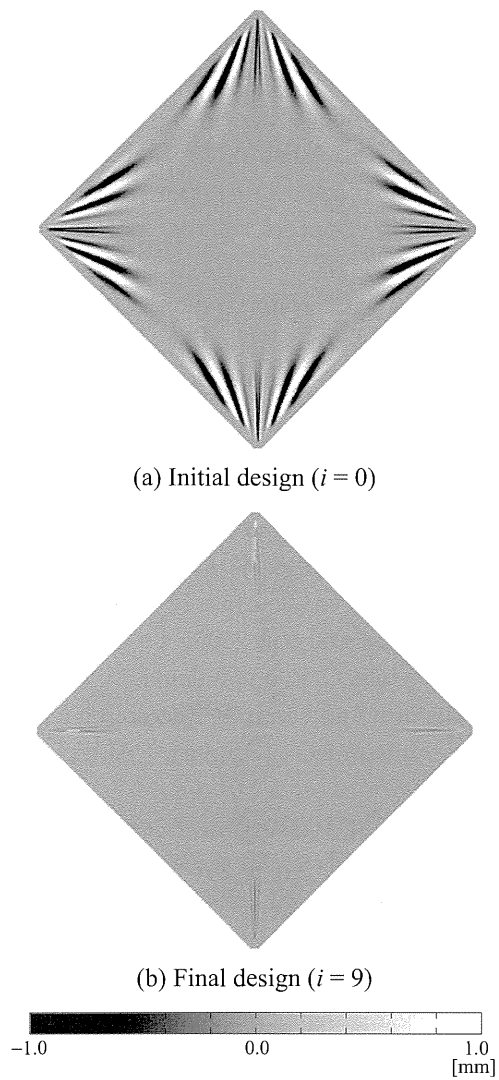


図8 シェル要素によるリンクル解析結果



## 参考文献

- 1) Lin, J. K., Sapna, G. H., III, and Scarborough S. E.: Advanced Precipitation Radar Antenna Singly Curved Parabolic Antenna Reflector Development, AIAA Paper 2003-1651, 2003.
- 2) Talley, C., Clayton, W., Gierow, P., Laue, G., McGee, J., and Moore, J.: Advanced Membrane Materials for Improved Solar Sail Capabilities, AIAA Paper 2002-1561, 2002.
- 3) 石原 競, 八木孝憲, 萩原伸幸, 大森博司: 極小曲面解析による膜構造の形状解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 469, pp.61-70, 1995.
- 4) Ishii, K.: Form Finding Analysis in Consideration of Cutting Patterns of Membrane Structures, International Journal of Space Structures, Vol. 14, pp.105-119, 1999.
- 5) Murphey, T. W., Murphy D. M., Mikulas, M. M. and Adler, A. L.: A Method to Quantify the Thrust Degradation Effects of Structural Wrinkles in Solar Sails, AIAA Paper 2002-1560, 2002.
- 6) Johnston, J. D.: Finite Element Analysis of Wrinkled Membrane Structures for Sunshield Applications, AIAA Paper 2002-1456, 2002.
- 7) Mikulas, M. M. and Adler, A. L.: Rapid Structural Assessment Approach for Square Solar Sails Including Edge Support Cords, AIAA Paper 2003-1447, 2003.
- 8) T. Akita and M. C. Natori.: Sensitivity Analysis Method for Membrane Wrinkling Based on the Tension-Field Theory, AIAA Journal, Vol. 46, pp. 1516-1527, 2008.
- 9) Fang, H. and Lou, M.: Catenary Systems for Membrane Structures, AIAA Paper 2001-1342, 2001.
- 10) Sakamoto, H., Park, K. C. and Miyazaki, Y.: Dynamic Wrinkle Reduction Strategies for Cable-Suspended Membrane Structures, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 42, pp. 850-858, 2005.
- 11) Greschik, G., White, C. V., and Salama, M. A.: On the Precisely Uniform and Uniaxial Tensioning of a Film Sheet via Integrated Catenary, AIAA Paper 2003-1906, 2003.
- 12) 小木曾望, 平城大典, 秋田剛.: 膜面のリンクル最小化のための NURBS 曲線を用いた形状最適設計, 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 56, pp. 72-79, 2008.
- 13) 秋田剛, 中篠恭一, 名取通弘.: 射影行列による膜面のリンクルモデル, 日本機械学会論文集(A編), Vol. 73, pp.224-231, 2007.
- 14) Akita, T., Nakashino, K., Natori, M. C., and Park, K. C.: A Simple Computer Implementation of Membrane Wrinkle Behaviour via a Projection Technique, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 71, pp.1231-1259, 2007.
- 15) Libai, A. and Simmonds, J. G.: The Nonlinear Theory of Elastic Shells (2nd edn.), Cambridge University Press, pp. 276-280, 431-441, 1998.
- 16) Moriya, K. and Uemura, M.: An Analysis of the Tension Field after Wrinkling in Flat Membrane Structure, Proceedings of 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, pp.189-198, 1972.
- 17) 西村敏雄, 登坂宣好, 本間俊雄: 有限要素法による張力場解析手法について, 日本建築学会構造系論文報告集, Vol. 368, pp.27-35, 1985.
- 18) Miller, R. K., Hedgepeth, J. M., Weingarten, VI., Das, P. and Kahyai, S.: Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes, Computers and Structures, Vol. 20, pp.631-639, 1985.
- 19) Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W. and Janssen, J. D.: The Wrinkling of Thin Membranes: Part I - Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp.884-887, 1987.
- 20) Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W. and Janssen, J. D.: The Wrinkling of Thin Membranes: Part II - Numerical Analysis, Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp.888-892, 1987.
- 21) Lu, K., Accorsi, M. and Leonard, J.: Finite Element Analysis of Membrane Wrinkling. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 50, pp. 1017-1038, 2001.
- 22) Miyazaki, Y.: Wrinkle/Slack Model and Finite Element Dynamics of Membrane, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 66, pp. 1179-1209, 2006.
- 23) Nakashino, K. and Natori, M. C.: Efficient Modification Scheme of Stress-Strain Tensor for Wrinkled Membranes, AIAA Journal, Vol. 43, pp.206-215, 2005.
- 24) Hisada, T.: Sensitivity Analysis of Nonlinear FEM, Probabilistic Methods in Civil Engineering, American Society of Civil Engineers, New York, pp.160-163, 1988.
- 25) Iwasa, T., Natori, M. C., and Higuchi, K.: Evaluation of Tension Field Theory for Wrinkling Analysis with Respect to the Post-Buckling Study, Journal of Applied Mechanics, Vol. 71, Transaction of American Society of Mechanical Engineers, 2004.

## Boundary Design of Rectangular Membranes for Wrinkle Reduction

Takeshi AKITA <sup>\*1)</sup>

Nozomu KOGISO <sup>\*2)</sup>

### SYNOPSIS

An optimum boundary design to minimize wrinkle intensity of a square membrane is investigated. The wrinkle intensity in a partly wrinkled membrane is evaluated from an apparent strain energy resulting from the deformation through wrinkling. This wrinkle intensity is used as an objective function for wrinkle reduction. As a numerical example, the taped regions around the boundary of square membrane are designed to minimize the wrinkle intensity. The numerical result shows that most wrinkles are eliminated by the optimization that is confirmed by the shell model analysis.

---

<sup>\*1)</sup> Assistant Professor, Osaka Prefecture University

<sup>\*2)</sup> Associate Professor, Osaka Prefecture University